BAB III

RUMUS-RUMUS TRIGONOMETRI

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari materi bab ini, Anda diharapkan mampu:

1. menggunakan rumus sinus jumlah dan selisih dua sudut,
2. menggunakan rumus kosinus jumlah dan selisih dua sudut,
3. menggunakan rumus tangen jumlah dan selisih dua sudut
4. menyatakan perkalian sinus dan kosinus sebagai jumlah atau selisih dari sinus atau kosinus,
5. menggunakan rumus-rumus sinus, kosinus dan tangen sudut ganda,
6. menggunakan rumus trigonometri jumlah dan selisih dua sudut dalam pemecahan masalah,
7. membuktikan rumus trigonometri jumlah dan selisih dua sudut,
8. membuktikan rumus trigonometri jumlah dan selisih dari sinus dan kosinus dua sudut,
9. merancang dan membuktikan rumus trigonometri sudut ganda, menyatakan sinus, kosinus, dan tangen suatu sudut sebagai fungsi trigonometri dari sudut ganda.

Pengantar

Gambar 3.1 Orang yang sedang menarik gerobak
Sumber: www.pks.banten.or.id

Benda seberat W ditarik sepanjang bidang datar oleh gaya yang bekerja pada tali yang diikatkan pada benda. Jika θ adalah sudut yang terbentuk antara tali dan bidang datar, maka besarnya gaya diberikan oleh persamaan

$$F = \frac{\mu W}{\mu \sin\theta + \cos\theta}$$

dengan μ adalah konstanta koefisien gesekan. Pertanyaannya, berapa nilai θ agar gaya yang diperlukan untuk menarik benda tersebut sekecil mungkin?

Dalam masalah di atas kita akan sampai pada memaksimumkan fungsi dari perkalian dua fungsi trigonometri, yang agak berbeda dengan fungsi trigonometri yang telah kita pelajari di kelas X dahulu. Lihat pembahasan ini pada contoh 3.2.4.

Untuk menyelesaikan permasalahan tersebut, Anda sebaiknya ingat kembali beberapa konsep tentang identitas trigonometri, dalil Phytagoras, aturan sinus dan kosinus untuk segi tiga, dan jarak antara dua titik. Selanjutnya, silakan Anda mempelajari materi bab ini, setelah itu Anda diharapkan dapat menerapkan konsep-konsep trigonometri ini untuk menyelesaikan masalah dalam kehidupan sehari-hari yang terkait dengannya, khususnya permasalahan di atas.

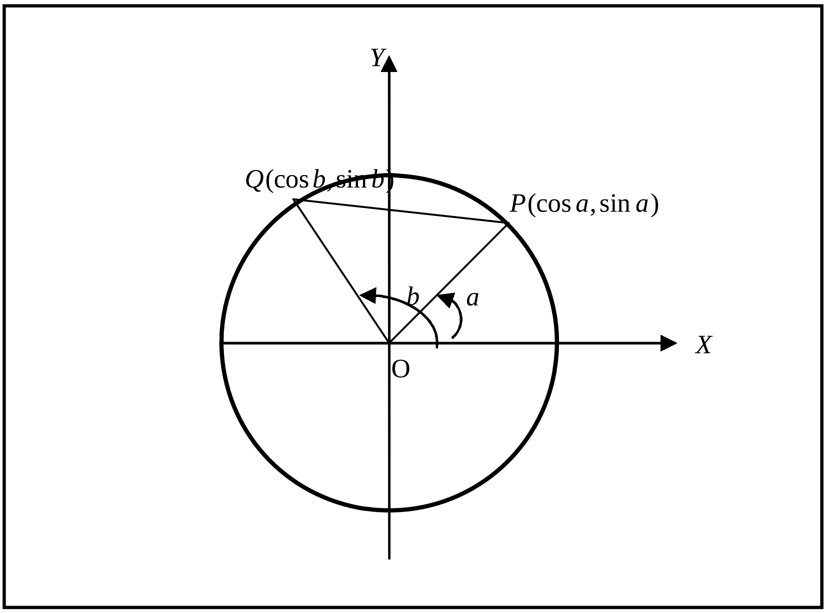
3.1 Rumus Trigonometri untuk Jumlah dan Selisih Dua Sudut

Di kelas X kita telah mempelajari bagaimana menghitung jarak dari dua titik yang diketahui pada bidang datar. Jika diketahui dua titik $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_2, y_2)$ pada bidang datar, maka kuadrat jarak antara dua titik P dan Q adalah

$$\overline{PQ}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

Sekarang kita ambil titik P dan Q pada lingkaran yang berjari-jari 1 dan berpusat di O, lihat gambar 3.2. Jika $\angle XOP = b$ dan $\angle XOQ = a$, maka koordinat P dan Q adalah $P(\cos b, \sin b)$ dan $Q(\cos a, \sin a)$, ingat definisi sinus dan kosinus. Oleh karena itu dengan (3.1) kita peroleh

$$\begin{aligned}
\overline{PQ}^2 &= (\cos a - \cos b)^2 + (\sin a - \sin b)^2 \\
&= \cos^2 a - 2\cos a \cos b + \cos^2 b + \sin^2 a - 2\sin a \sin b + \sin^2 b \\
&= (\cos^2 a + \sin^2 a) + (\cos^2 b + \sin^2 b) - 2(\cos a \cos b + \sin a \sin b) \\
&= 2 - 2(\cos a \cos b + \sin a \sin b) \qquad (3.2)
\end{aligned}$$



Gambar 3.2 Lingkaran berpusat di O dengan jari-jari 1

Di pihak lain, dengan menggunakan rumus kosinus dalam segitiga POQ kita peroleh:

$$\begin{aligned}
\overline{PQ}^2 &= \overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 - 2\,\overline{OP}.\overline{OQ}\ \cos(a - b) \\
&= 2 - 2\cos(a - b) \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

Karena ruas kiri dari (3.2) dan (3.3) sama, maka kita simpulkan bahwa:

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \qquad (3.4)$$

Jika kita ambil $a = 90^{\circ} = \pi/2$, maka (3.4) menjadi:

$$\cos(\pi/2 - b) = \cos(\pi/2)\cos b + \sin(\pi/2)\sin b = \sin b$$

Dari hasil ini, jika b kita ganti dengan $\pi/2 - b$, maka

$$\cos b = \sin(\pi/2 - b)$$

Jadi, untuk sembarang sudut a kita mempunyai identitas

$$\sin(\pi/2 - a) = \cos a \quad \text{dan} \quad \cos(\pi/2 - a) = \sin a \qquad (3.5)$$

Jika dalam rumus (3.4) b kita ganti dengan $-b$, dan karena $\cos(-b) = \cos b$, maka kita peroleh:

$$\begin{aligned}\cos(a - (-b)) = \cos(a + b) &= \cos a \cos(-b) + \sin a \sin(-b) \\ &= \cos a \cos b - \sin a \sin b\end{aligned}$$

atau

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \qquad (3.6)$$

Jika dalam rumus (3.4) a kita ganti dengan $\pi/2 - a$, maka kita peroleh

$$\cos((\pi/2 - a) - b) = \cos(\pi/2 - a)\cos b + \sin(\pi/2 - a)\sin b .$$

Dengan (3.5),

$$\cos((\pi/2 - a) - b) = \cos(\pi/2 - (a + b)) = \sin(a + b),$$

$$\cos(\pi/2 - a) = \sin a$$

$$\sin(\pi/2 - a) = \cos a,$$

maka dengan (3.4) kita peroleh:

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \qquad (3.7)$$

Jika dalam rumus (3.7) b kita ganti dengan $-b$, maka kita peroleh

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \qquad (3.8)$$

Dari rumus (3.6) dan (3.7) kita peroleh

$$\tan(a + b) = \frac{\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b}$$

Jika pembilang dan penyebut dari ruas kanan kita bagi dengan $\cos a \cos b$, maka kita peroleh

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \qquad (3.9)$$

Jika dalam rumus (3.9) b kita ganti dengan $-b$, maka kita peroleh

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1+\tan a \tan b} \tag{3.10}$$

Contoh 3.1.1

Buktikan bahwa $\cos(270^{\circ} - a) = -\sin a$.

Bukti:

Dari rumus (3.4)

$$\begin{aligned}\cos(270^{\circ} - a) &= \cos 270^{\circ} \cos a + \sin 270^{\circ} \sin a \\ &= 0.\cos a + (-1).\sin a = \sin a\end{aligned}$$

Jadi, terbukti $\cos(270^{\circ} - a) = -\sin a$.

□

Contoh 3.1.2

Tanpa memakai tabel atau kalkulator, hitunglah:

a. $\sin 15^{\circ}$

b. $\tan 75^{\circ}$

Penyelesaian:

a. Dari rumus (3.8)

$$\begin{aligned}\sin 15^{\circ} &= \sin(45^{\circ} - 30^{\circ}) \\ &= \sin 45^{\circ} \cos 30^{\circ} - \cos 45^{\circ} \sin 30^{\circ} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})\end{aligned}$$

b. Dari rumus (3.9)

$$\begin{aligned}\tan 75^{\circ} &= \tan(45^{\circ} + 30^{\circ}) \\ &= \frac{\tan 45^{\circ} + \tan 30^{\circ}}{1-\tan 45^{\circ} \tan 30^{\circ}} \\ &= \frac{1+\frac{1}{3}\sqrt{3}}{1-1\cdot\frac{1}{3}\sqrt{3}} \\ &= 2+\sqrt{3}\end{aligned}$$

□

Contoh 3.1.3

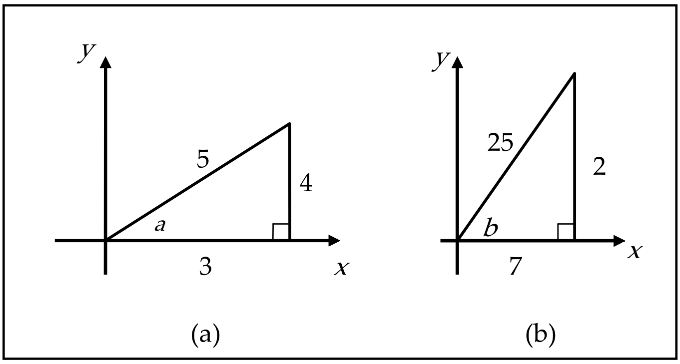
Jika $\sin a = 4/5$ dan $\cos b = 7/25$ dengan $0 \le a \le \pi/2$ dan $0 \le b \le \pi/2$, tentukan nilai dari :

a. $\sin(a+b)$

b. $\cos(a-b)$

Penyelesaian:

Dengan dalil Phytagoras, kita dapat menentukan besarnya $\cos a$ dan $\sin b$.



Gambar 3.3

Dari gambar 3.3 (a), untuk $\sin a = 4/5$ kita peroleh $\cos a = 3/5$ dan $\tan a = 4/3$. Dari gambar 3.3 (b), jika $\cos b = 7/25$, maka $\sin b = 24/25$ dan $\tan b = 24/7$.

a. Dengan rumus (3.7), kita peroleh

$$\begin{aligned}\sin(a+b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ &= \frac{4}{5}\cdot\frac{7}{25} + \frac{3}{5}\cdot\frac{24}{25} \\ &= \frac{100}{125} \\ &= \frac{4}{5}\end{aligned}$$

b. Dengan rumus (3.4), kita peroleh

$$\begin{aligned}\cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ &= \frac{3}{5}\cdot\frac{7}{25} + \frac{4}{5}\cdot\frac{24}{25} \\ &= \frac{117}{125}\end{aligned}$$

□

Latihan 3.1

1. Sederhanakan bentuk berikut dan hitung nilainya.

   a. $\sin 30^{o} \cos 15^{o} + \cos 30^{o} \sin 15^{o}$

   b. $\sin 120^{o} \sin 15^{o} - \cos 120^{o} \cos 15^{o}$

   c. $\dfrac{\tan 50^{o} - \tan 20^{o}}{1 + \tan 50^{o} \cdot \tan 20^{o}}$

2. Tanpa tabel atau kalkulator, tentukan nilai berikut ini.

   a. $\cos 105^{o}$ b. $\sin 165^{o}$ c. $\tan 225^{o}$

3. Jika a lancip dan b tumpul, $\sin a = 0,6$ dan $\cos b = -0,28$, hitunglah $\cos(a+b)$ dan $\tan(a-b)$.

4. Diketahui ΔABC adalah lancip, $\sin A = 0,6$ dan $\sin B = 0,96$. Tanpa memakai tabel atau kalkulator hitung $\tan C$.

5. Jika $\sin(x+30^{o}) = \sin x$, buktikan bahwa $\tan x = 2+\sqrt{3}$.

Untuk soal nomor 6 sampai dengan nomor 10, buktikan identitas yang diberikan!

6. $\dfrac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{\sin(x+y)+\sin(x-y)} = \cot x$

7. Jika $x+y = 45^{o}$, buktikan bahwa $(1+\tan x)(1+\tan y) = 2$.

8. Diketahui $a+b+c = \pi$, tunjukkan bahwa

$$\tan a + \tan b + \tan c = \tan a \cdot \tan b \cdot \tan c$$

9. Lamanya matahari bersinar bersinar (dikukur dalam jam) di Philadelphia Amerika Serikat pada hari ke-t dalam setahun dimodelkan oleh fungsi

$$L(t) = 12 + 2,8\sin\left[\frac{2\pi}{365}(t-80)\right]$$

   Dengan model ini, bandingkan bagaimana banyaknya jam di mana matahari bersinar bertambah di Philadelphia pada 17 Maret dan 17 Oktober.

10. Bintang berubah '*Cepheid*' adalah bintang yang kecemerlangannya berganti-ganti bertambah dan berkurang. Bintang yang paling dapat dilihat dengan mudah adalah *Delta Cepheid*, yang memiliki selang di antara waktu kecemerlangan maksimum 5,4 hari. Rataan kecemerlangan bintang ini adalah 4,0 dan kecemerlangannya berubah sebesar $\pm 0,35$. Berdasarkan data ini, kecermerlangan *Delta Cepheid* pada saat t, dengan t diukur dalam hari, dimodelkan oleh fungsi

$$B(t) = 4,0 + 0,35\sin(2\pi t/5,4).$$

   Kapan bintang *Delta Cepheid* terlihat paling cemerlang?

3.2 Rumus Trigonometri Sudut Ganda

Kita perhatikan kembali rumus (3.6),

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

Jika kita ambil $b = a$, maka rumus itu menjadi

$\cos(a+a) = \cos a \cos a - \sin a \sin a$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a \qquad (3.11)$$

Karena $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$, maka rumus terakhir dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} \cos 2a &= 2\cos^2 a - 1 \\ \cos 2a &= 1 - 2\sin^2 a \end{aligned} \qquad (3.12)$$

Dari rumus (3.7) dan (3.9) kita mempunyai:

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \quad \text{dan} \quad \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

Jika kita ambil $b = a$, maka akan diperoleh:

$$\sin 2a = 2\sin a \cos a \qquad (3.13)$$

dan

$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a} \qquad (3.14)$$

Karena kita dapat menuliskan $a = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a$, maka dengan analogi rumus-rumus di atas kita mempunyai

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos^2 \tfrac{1}{2}a - \sin^2 \tfrac{1}{2}a \\ &= 2\cos^2 \tfrac{1}{2}a - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 \tfrac{1}{2}a \end{aligned}$$

$$\sin a = 2\sin \tfrac{1}{2}a \cos \tfrac{1}{2}a \qquad (3.15)$$

$$\tan a = \frac{2\tan \frac{1}{2}a}{1 - \tan^2 \frac{1}{2}a}$$

Tugas Mandiri

Dengan rumus (3.12), (3.12), dan (3.14) buktikan bahwa:

a. $\sin 3a = -4\sin^3 a + 3\sin a$

b. $\cos 3a = 4\cos^3 a - \cos a$

Contoh 3.2.1

Tanpa menggunakan tabel atau kalkulator hitunglah $\sin 120^\circ$ dan $\cos 67^\circ 30'$.

Penyelesaian:

Dengan rumus (3.13) kita peroleh

$$\sin 120^\circ = \sin 2(60^\circ) = 2\sin 30^\circ \cos 30^\circ$$
$$= 2 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

Dari rumus (3.12) yang pertama, kita peroleh

$$\cos 135^\circ = 2\cos^2 67^\circ 30' - 1$$

atau

$$\cos^2 67^\circ 30' = \frac{1}{2}(1 + \cos 135^\circ) = \frac{1}{2}(1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}) = \frac{1}{4}(2 - \sqrt{2})$$

Jadi, $\cos 67^\circ 30' = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

□

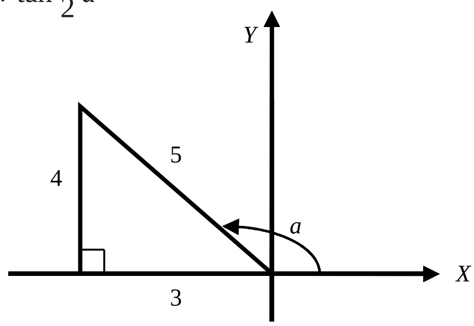
Contoh 3.2.2

Jika $\sin a = 4/5$, (a di kuadran II), hitunglah:

a. $\sin 2a$ b. $\cos 2a$ c. $\tan \frac{1}{2}a$

Penyelesaian:

Jika $\sin a = 4/5$ dengan a dikuadran II, maka kita peroleh $\cos a = -3/5$ dan $\tan a = -4/3$, lihat gambar 3.5.



Gambar 3.5

a. $\sin 2a = 2\sin a \cos a = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot -\frac{3}{5} = -\frac{24}{25}$,

b. $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = \left(-\frac{3}{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = -\frac{7}{25}$,

c. $\tan \frac{1}{2}a = \dfrac{\sin \frac{1}{2}a}{\cos \frac{1}{2}a} = \dfrac{\frac{2}{5}\sqrt{5}}{\frac{1}{5}\sqrt{5}} = 2$

□

Tugas Kelompok

Gambarlah sebuah segitiga sama kaki AOB dengan puncak O dan besar sudut AOB adalah t. Nyatakan luas segitiga AOB dalam t. Kemudian, gambarlah bidang setengah lingkaran dengan diameter ruas garis AB. Misalkan D adalah luas segitiga AOB dan E adalah luas setengah lingkaran. Carilah rumus untuk D/E yang dinyatakan dalam t. Diskusikan dengan kelompok Anda.

Contoh 3.2.3

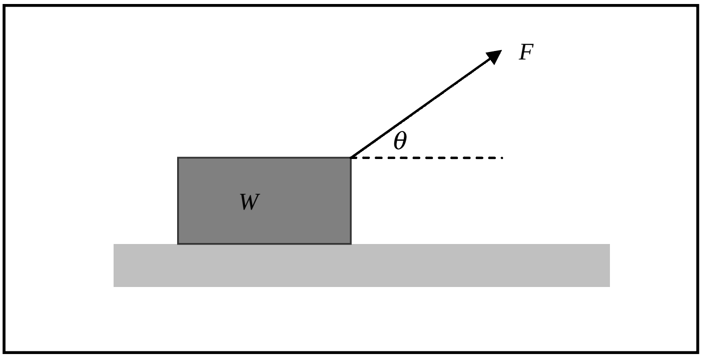
Pada awal bab dikemukakan bahwa gaya yang diperlukan untuk menarik benda seberat W sepanjang bidang datar diberikan oleh persamaan

$$F = \frac{\mu W}{\mu \sin\theta + \cos\theta}$$

dengan θ adalah sudut yang terbentuk antara tali dan bidang datar, dan μ adalah konstanta koefisien gesekan. Jika $\mu = \sqrt{3}$, bagaimana posisi tali seharusnya agar gaya yang diperlukan untuk menarik benda tersebut sekecil mungkin?

Penyelesaian:

Perhatikan sketsa berikut ini.



Gambar 3.6

Karena besarnya W konstan, maka gaya F akan minimum apabila penyebut $\mu \sin\theta + \cos\theta = \sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$ nilainya maksimum. (Mengapa?)

Misalkan $\tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$ (pembagian antara koefisien sinus dengan koefisien kosinus), sehingga kita peroleh bahwa $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dan $\cos\alpha = \frac{1}{2}$. Nilai $\tan\alpha = \sqrt{3}$ dipenuhi untuk $\alpha = 60^\circ$. Dengan demikian,

$$\begin{aligned}\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta &= 2\cos\alpha\cos\theta + 2\sin\alpha\sin\theta \\ &= 2\cos(\theta - \alpha) \\ &= 2\cos(\theta - 60^\circ)\end{aligned}$$

Karena nilai terbesar dari $\cos x$ adalah 1, dan terjadi untuk $x = 0$, maka $2\cos(\theta - 60^\circ)$ maksimum apabila $\theta - 60^\circ = 0$, yang memberikan $\theta = 60^\circ$. Jadi, agar gaya yang diperlukan untuk menarik benda tersebut sekecil mungkin, maka posisi tali harus membentuk sudut $\theta = 60^\circ$ dengan bidang datar.

□

Latihan 3.2

1. Sederhanakan bentuk berikut, kemudian hitunglah nilainya!

   a. $4\sin 22^o30'\cos 22^o30'$

   b. $\sin^2 \frac{\pi}{3} - \cos^2 \frac{\pi}{3}$

   c. $2\tan 15^o \cos^2 15^o$

   d. $\dfrac{2\tan 15^o}{1-\tan^2 15^o}$

   e. $\tan 25^o \sin 50^o + \cos 50^o$

2. Nyatakan bentuk berikut sebagai sudut ganda!

   a. $\sin 4a$

   b. $\cos 4a$

   c. $\tan 4a$

3. Diketahui $\tan a = 3/4$ dan $\sin b = -5/13$, a lancip dan b tumpul, hitunglah:

   a. $\sin(a+2b)$

   b. $\cos 2(a-b)$

   c. $\tan(a-2b)$

4. Gunakan fakta $3a = 2a + a$, untuk membuktikan identitas berikut:

   a. $\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$

   b. $\cos 3a = 4\cos^2 a - 3\cos a$

   c. $\tan 3a = \dfrac{3\tan a - \tan^3 a}{1-3\tan^2 a}$

5. Jika $\tan \frac{1}{2}x = p$, hitunglah:

   a. $\cos x$

   b. $\sin x$

   c. $\sin 2x$

Untuk soal nomor 6 sampai dengan nomor 10, buktikan identitas yang diberikan!

6. $(2\cos z - 1)(2\cos z + 1) = 2\cos 2z + 1$

7. $\tan(\frac{\pi}{4} + a) = \dfrac{\cos a + \sin a}{\cos a - \sin a} = \dfrac{1+\sin 2a}{\cos 2a}$

8. Buktikan: $\cot(a+b) + \cot(a-b) = \dfrac{\sin 2a}{\cos^2 b - \cos^2 a}$.

9. Simpangan sebuah partkel pada senar bergetar diberikan oleh persamaan

$$s(t) = 10 + \frac{1}{2}\sin(5\pi t)\cos(5\pi t)$$

   dengan s diukur dalam sentimeter dan t dalam detik. Kapan senar mempunyai simpangan terbesar?

10. Persamaan gerak partikel dikatakan *gerak harmonis sederhana*, jika mempunyai persamaan berbentuk

$$s(t) = A\cos(kt + \theta)$$

dengan *A, k*, dan θ konstanta tetap. Tunjukkan bahwa setiap persamaan partikel berikut merupakan gerak harmonis sederhana, dengan *s* diukur dalam sentimeter dan *t* dalam detik.

a. $s(t) = 5 - 10\sin^2 2t$ b. $s(t) = 4\sin(t - \frac{\pi}{6})$

3.3 Rumus Perkalian Sinus dan Kosinus

Pada bagian sebelumnya kita telah memperoleh rumus:

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$$

Jika ruas yang bersesuaian dari kedua rumus ini kita jumlahkan dan kita kurangkan, maka akan kita peroleh:

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin a\cos b$$

$$\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2\cos a\sin b$$

atau

$$\sin a\cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$$

$$\cos a\sin b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) - \sin(a-b)) \qquad (3.16)$$

Dengan cara yang sama, dari rumus:

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$$

kita peroleh rumus

$$\cos a\cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

$$\sin a\sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b)) \qquad (3.17)$$

Contoh 3.3.1

Nyatakan sebagai jumlah atau selisih dari sinus atau kosinus dari :

a. $2\sin 52^o30'\cos 7^o30'$

b. $\cos 52^o30'\cos 7^o30'$

Penyelesaian:

a. Dengan rumus (3.16) yang pertama, kita peroleh

$$2\sin 52^o30'\cos 7^o30' = \sin(52^o30'+7^o30')+\sin(52^o30'-7^o30')$$
$$= \sin 60^o + \sin 45^o$$
$$= \frac{1}{2}(\sqrt{3}+\sqrt{2})$$

b. Dengan rumus (3.17) yang pertama, kita peroleh

$$\cos 52^o30'\cos 7^o30' = \frac{1}{2}\left(\cos(52^o30'+7^o30')+\cos(52^o30'-7^o30')\right)$$
$$= \frac{1}{2}(\cos 60^o + \cos 45^o)$$
$$= \frac{1}{4}(1+\sqrt{2})$$

□

Tugas Kelompok

Sebuah persegi panjang harus ditempatkan di dalam sebuah setengah lingkaran berjari-jari *r*. Berapakah ukuran persegi panjang sehingga luasnya maksimum? Diskusikan dalam kelompok Anda.

Contoh 3.3.2

Sederhanakan bentuk berikut.

a. $\sin 84^o \tan 42^o + \cos 84^o$

b. $2\cos(x+\frac{\pi}{4})\sin(x-\frac{\pi}{4})$

Penyelesaian:

a. Dengan rumus (3.16) yang pertama dan menguraikan tangen ke dalam sinus dan kosinus, kita peroleh:

$$\sin 84^o \tan 42^o + \cos 84^o = 2\sin 42^o \cos 42^o \cdot \frac{\sin 42^o}{\cos 42^o} + \cos 84^o$$
$$= 2\sin^2 42^o + \cos 84^o$$
$$= 2\sin^2 42^o + 1 - 2\sin^2 42^o$$
$$= 1$$

Jadi, $\sin 84^o \tan 42^o + \cos 84^o = 1$.

b. Dengan rumus (3.16) yang kedua, kita peroleh:

$$2\cos(x+\frac{\pi}{4})\sin(x-\frac{\pi}{4}) = \sin\left((x+\frac{\pi}{4})+(x-\frac{\pi}{4})\right)-\sin\left((x+\frac{\pi}{4})-(x-\frac{\pi}{4})\right)$$

$$= \sin 2x - \sin\frac{\pi}{2}$$

$$= \sin 2x - 1$$

Jadi, $2\cos(x+\frac{\pi}{4})\sin(x-\frac{\pi}{4}) = \sin 2x - 1$.

□

Latihan 3.3

1. Sederhanakan bentuk berikut sebagai jumlah atau selisih sinus atau kosinus!
   a. $3\sin x \sin y$
   b. $4\cos(x+y)\sin(x-y)$
   c. $\cos(a+\pi)\cos(a-\pi)$
   d. $2\cos(\frac{\pi}{4}+x)\sin(\frac{\pi}{4}-x)$
   e. $2\sin(a+b-c)\sin(a+b-c)$
2. Hitunglah nilai dari:
   a. $\sin 50^{o}\sin 40^{o} - \cos 95^{o}\cos 85^{o}$
   b. $\cos 40^{o}\cos 20^{o} - \sin 70^{o}\sin 50^{o}$
   c. $\cos 75^{o}\sin 15^{o} + \sin 75^{o}\cos 15^{o}$
3. Tentukan nilai maksimum dan minimum dari setiap fungsi berikut.
   a. $f(x) = 2\cos(x+\frac{\pi}{4})\cos(x-\frac{\pi}{4})$
   b. $g(x) = 3\sin(x+\frac{3\pi}{4})\sin(x-\frac{3\pi}{4})$
4. Tentukan jumlah 5 suku yang pertama dari deret:
   a. $\sin 32x\sin 96x + \sin 16x\sin 48x + \sin 8x\sin 24 + \ldots$
   b. $\cos x\cos 3x - \cos 2x\cos 6x + \cos 4x\cos 12x - \ldots$
5. Diketahui ΔABC siku-siku di C dan berlaku hubungan $\sin(A+B)+\sin(A-B)=1$. Tentukan besarnya sudut A dan B.

3.4 Rumus Trigonometri Jumlah dan Selisih Dua Sudut

Pada bagian sebelumnya kita telah membuktikan keempat rumus perkalian sinus dan kosinus berikut,

$$\sin(p+q)+\sin(p-q)=2\sin p\cos q$$
$$\sin(p+q)-\sin(p-q)=2\cos p\sin q$$
$$\cos(p+q)+\cos(p-q)=2\cos p\cos q$$
$$\cos(p-q)-\cos(p+q)=2\sin p\sin q\,.$$

Jika kita ambil $a=p+q$ dan $b=p-q$, maka

$$p=\tfrac{1}{2}(a+b) \quad \text{dan} \quad q=\tfrac{1}{2}(a-b)$$

Dengan mensubtitusikan harga p dan q ini ke dalam keempat rumus di atas akan kita peroleh rumus penjumlahan dan pengurangan sinus dan kosinus berikut ini.

$$\sin a+\sin b=2\sin\tfrac{1}{2}(a+b)\cos\tfrac{1}{2}(a-b)$$
$$\sin a-\sin b=2\cos\tfrac{1}{2}(a+b)\sin\tfrac{1}{2}(a-b)$$
$$\cos a+\cos b=2\cos\tfrac{1}{2}(a+b)\cos\tfrac{1}{2}(a-b)$$
$$\cos a-\cos b=-2\sin\tfrac{1}{2}(a+b)\sin\tfrac{1}{2}(a-b)$$

Selanjutnya, kita perhatikan

$$\begin{aligned}\tan a+\tan b &= \frac{\sin a}{\cos a}+\frac{\sin b}{\cos b}\\ &= \frac{\sin a\cos b+\cos a\sin b}{\cos a\cos b}\\ &= \frac{\sin(a+b)}{\tfrac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b))}\\ &= \frac{2\sin(a+b)}{\cos(a+b)+\cos(a-b)}\end{aligned}$$

Jadi,

$$\tan a+\tan b=\frac{2\sin(a+b)}{\cos(a+b)+\cos(a-b)}$$

Dengan cara yang serupa, kita peroleh:

$$\begin{aligned}\tan a-\tan b &= \frac{\sin a}{\cos a}-\frac{\sin b}{\cos b}\\ &= \frac{\sin a\cos b-\cos a\sin b}{\cos a\cos b}\\ &= \frac{\sin(a-b)}{\tfrac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b))}\\ &= \frac{2\sin(a-b)}{\cos(a+b)+\cos(a-b)}\end{aligned}$$

$$\tan a - \tan b = \frac{2\sin(a-b)}{\cos(a+b)+\cos(a-b)} \qquad (3.20)$$

Contoh 3.4.1

Tanpa menggunakan tabel atau kalkulator, hitunglah nilai dari:

a. $\sin 75^{o} + \sin 15^{o}$

c. $\tan 105^{o} + \tan 15^{o}$

b. $\cos 75^{o} - \cos 15^{o}$

Penyelesaian:

Untuk menyelesaikan soal-soal a sampai dengan c, kita terapkan rumus-rumus pada persamaan (3.18), sedangkan untuk menjawab soal d dan e, kita manfaatkan rumus (3.19) dan (3.20).

a. $\sin 75^{o} + \sin 15^{o} = 2\sin \tfrac{1}{2}(75^{o}+15^{o})\cos \tfrac{1}{2}(75^{o}-15^{o})$

$$= 2\sin 45^{o} \cos 30^{o}$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{6}$$

b. $\cos 75^{o} - \cos 15^{o} = -2\sin \frac{1}{2}(75^{o}+15^{o})\sin \frac{1}{2}(75^{o}-15^{o})$

$$= -2\sin 45^{o} \sin 30^{o}$$

$$= -2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

c. $\tan 105^{o} + \tan 15^{o} = \dfrac{2\sin(105^{o}+15^{o})}{\cos(105^{o}+15^{o})+\cos(105^{o}-15^{o})}$

$$= \frac{2\sin 120^{o}}{\cos 120^{o} + \cos 90^{o}}$$

$$= \frac{2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}}{-\frac{1}{2}+0}$$

$$= -2\sqrt{3}$$

□

Contoh 3.4.2

Buktikan bahwa dalam $\Delta\, ABC$ berlaku:

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$$

Bukti:

Dalam ΔABC berlaku

$$A+B+C=180^{o} \quad \text{atau} \quad A+B=180^{o}-C,$$

sehingga

$$\tan(A+B)=\tan(180^{o}-C)=-\tan C.$$

Di pihak lain, dari rumus tangen,

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B} \quad \text{atau} \quad \tan A+\tan B=\tan(A+B)\left(1-\tan A\tan B\right)$$

Akibatnya,

$$\begin{aligned}\tan A+\tan B+\tan C &= \tan(A+B)\left(1-\tan A\tan B\right)+\tan C\\ &= -\tan C\left(1-\tan A\tan B\right)+\tan C\\ &= -\tan C\left(1-\tan A\tan B-1\right)\\ &= \tan A\tan B\tan C\end{aligned}$$

□

Contoh 3.4.3

Hitunglah jumlah dari n suku yang pertama deret

$$\sin a+\sin(a+b)+\sin(a+2b)+\ldots$$

Penyelesaian:

Misalkan S_n adalah jumlah n suku yang pertama,

$$S_n=\sin a+\sin(a+b)+\sin(a+2b)+\ldots+\sin(a+(n-1)b)$$

Suku-suku deret dapat dijumlahkan, apabila jenis fungsi sama dan besar sudutnya sama. Hal ini dapat kita lakukan dengan membuat setiap suku deret diubah ke perkalian sinus dengan sinus. Deret di atas menyarankan faktor pengalinya adalah $2\sin\frac{b}{2}$, sehingga:

$$\begin{aligned}2\sin\frac{b}{2}\ \sin a &= \cos(a-\frac{b}{2}) - \cos(a+\frac{b}{2})\\ 2\sin\frac{b}{2}\ \sin(a+b) &= \cos(a+\frac{b}{2}) - \cos(a+\frac{3b}{2})\\ 2\sin\frac{b}{2}\ \sin(a+2b) &= \cos(a+\frac{3b}{2}) - \cos(a+\frac{5b}{2})\\ \vdots\qquad & \qquad\vdots \qquad\qquad \vdots\\ 2\sin\frac{b}{2}\ \sin(a+(n-1)b) &= \cos\left(a+(n-\frac{3}{2})b\right)-\cos\left(a+(n-\frac{1}{2})b\right)\end{aligned}$$

$$\rule{10cm}{0.4pt} \ +$$

$$\begin{aligned}2\sin\frac{b}{2}\ S_n &= \cos\left(a-\frac{1}{2})b\right)-\cos\left(a+(n-\frac{1}{2})b\right)\\ &= -2\sin\frac{a-\frac{b}{2}+a+(n-\frac{1}{2})b}{2}\ \sin\frac{a-\frac{b}{2}-a-(n-\frac{1}{2})b}{2}\\ &= 2\sin\left(a+\frac{n-1}{2}b\right)\sin\left(\frac{n}{2}b\right)\end{aligned}$$

Jadi,

$$S_n = \frac{\sin\left(\frac{n}{2}b\right)}{\sin\left(\frac{b}{2}\right)} \cdot \sin\left(a + \frac{n-1}{2}b\right)$$

□

Latihan 3.4

1. Tanpa menggunakan tabel atau kalkulator, tentukan nilai dari:

   a. $\cos 105^{\circ} + \cos 15^{\circ}$

   b. $\sin 105^{\circ} - \sin 15^{\circ}$

   c. $\tan 52^{\circ}30' - \tan 7^{\circ}30'$

   d. $\cos 75^{\circ} + \sin 75^{\circ}$

   e. $\csc 10^{\circ} + \csc 50^{\circ} - \csc 70^{\circ}$

   f. $\tan 165^{\circ} + \tan 15^{\circ}$

2. Nyatakan sebagai hasilkali bentuk-bentuk berikut.

   a. $\sin x + \sin 3x$

   b. $\cos x - \cos 3x$

   c. $\cos(\frac{\pi}{2} + 2x) - \cos(\frac{\pi}{2} - 2x)$

   d. $a\cos x + b\sin x$

   e. $\cos x + 2\cos 2x + \cos 3x$

   f. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x$

Untuk soal nomor 3 sampai dengan nomor 5, buktikan identitas yang diberikan!

3. $\dfrac{\sin 2a - \sin 2b}{\cos 2a + \cos 2b} = \tan(a-b)$

4. $\tan a + \tan b - \tan(a+b) = -\tan a \cdot \tan b \cdot \tan(a+b)$

5. Jika $a + b + c = 90^{\circ}$, buktikan bahwa $\tan a \tan b + \tan b \tan c + \tan c \tan a = 1$.

Untuk soal nomor 6 sampai dengan nomor 8, buktikan bahwa dalam ΔABC *berlaku identitas yang diberikan!*

6. $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{1}{2}A \sin\frac{1}{2}B \sin\frac{1}{2}C$

7. $\sin 2A + \sin 2B - \sin 2C = 4\cos A \cos B \sin C$

8. $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A \cos B \cos C$

10. Tanpa menggunakan tabel atau kalkulator, buktikan bahwa:

    a. $\cos 80^{\circ} + \cos 40^{\circ} - \cos 20^{\circ} = 0$

    b. $\sin 10^{\circ} \sin 30^{\circ} \sin 50^{\circ} \sin 70^{\circ} = \dfrac{1}{16}$

13. Hitunglah 20 suku yang pertama dari deret berikut.

    a. $\sin a + \sin 3a + \sin 5a + \ldots + \sin(2n-1)a + \ldots$

    b. $\cos(a+x) + \cos(a+2x) + \cos(a+3x) + \ldots + \cos(a+nx) + \ldots$

Rangkuman

1. Rumus trigonometri jumlah dan selisih sudut:
   a. $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$
   b. $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$
   c. $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$
   d. $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$
   e. $\tan(a+b)=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$
   f. $\tan(a-b)=\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$
2. Rumus trigonometri sudut ganda:
   a. $\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a$
   b. $\cos 2a=2\cos^2 a-1$ atau $\cos 2a=1-2\sin^2 a$
   c. $\sin 2a=2\sin a\cos a$
   d. $\tan 2a=\dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$
3. Rumus perkalian sinus dan kosinus:
   a. $\sin a\cos b=\frac{1}{2}(\sin(a+b)+\sin(a-b))$
   b. $\cos a\sin b=\frac{1}{2}(\sin(a+b)-\sin(a-b))$
   c. $\cos a\cos b=\frac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b))$
   d. $\sin a\sin b=\frac{1}{2}(\cos(a-b)-\cos(a+b))$
4. Rumus jumlah dan selisih dua sudut:
   a. $\sin a+\sin b=2\sin\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}(a-b)$
   b. $\sin a-\sin b=2\cos\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}(a-b)$
   c. $\cos a+\cos b=2\cos\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}(a-b)$
   d. $\cos a-\cos b=-2\sin\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}(a-b)$
   e. $\tan a+\tan b=\dfrac{2\sin(a+b)}{\cos(a+b)+\cos(a-b)}$
   f. $\tan a-\tan b=\dfrac{2\sin(a-b)}{\cos(a+b)+\cos(a-b)}$

Math Info

Dalam sarang lebah, tiap sel berupa prisma segi enam beraturan, terbuka pada satu ujung dengan sudut trihedral pada ujung lainnya. Dipercaya bahwa lebah membentuk selnya dalam suatu cara yang meminimumkan luas permukaan untuk volume yang diketahui, sehingga lebah akan menggunakan lilin sesedikit mungkin dalam pembangunan sel. Pemeriksaan sel-sel ini telah memperlihatkan bahwa ukuran sudut puncak secara mengagumkan adalah konsisten. Berdasarkan kepada geometri sel tersebut, ternyata luas permukaan S merupakan fungsi trigonometri,

$$S = 6sh - \frac{3}{2}s^2 \cot\theta + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}s^2 \csc\theta\right)$$

dengan s adalah panjang sisi segienam, dan h adalah tinggi sel.

Uji Kompetensi

A. Untuk soal nomor 1 sampai dengan nomor 15, pilihlah satu jawaban yang paling tepat! Kerjakan di buku tugas Anda!

1. Jika $0 < x < \pi/2$ dan $\cos x = p$, maka $\tan x + \sin x = \cdots$

   A. $\dfrac{-1 + p\sqrt{1+p^2}}{1+p^2}$

   D. $\dfrac{1+p}{p}\sqrt{1-p^2}$

   B. $\dfrac{-1 + p\sqrt{1+p^2}}{1+p}$

   E. $\dfrac{1+p}{p^2}\sqrt{1-p^2}$

   C. $\dfrac{-1+p}{p}\sqrt{1-p^2}$

2. Dalam segitiga ABC, diketahui $\sin C = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$. Jika $\tan A \cdot \tan B = 13$, maka $\tan A + \tan B = \cdots$

   A. -18

   E. 18

   B. -8

   D. 8

   C. $\dfrac{20}{3}$

3. Jika θ sudut lancip yang memenuhi $2\cos^2\theta = 1 + 2\sin 2\theta$, maka $\tan\theta = \cdots$

A. $2+\sqrt{5}$
B. $2+\sqrt{3}$
C. $2-\sqrt{3}$
D. $\sqrt{5}-2$
E. $\sqrt{3}-1$

4. Diketahui $\tan x = 4/3$, maka nilai $\cos 3x + \cos x = \cdots$

A. $\frac{-42}{125}$
B. $\frac{-14}{125}$
C. $\frac{20}{125}$
D. $\frac{28}{125}$
E. $\frac{56}{125}$

5. Dalam segitiga ABC, diketahui $\cos(B+C) = \frac{9}{40}$. Jika panjang sisi AC = 10 cm, dan AB = 8 cm, maka panjang sisi $BC = \cdots$

A. $8\sqrt{2}$
B. $9\sqrt{2}$
C. $10\sqrt{2}$
D. $11\sqrt{2}$
E. $12\sqrt{2}$

6. Jika $\frac{\tan x}{1+\tan x} + \frac{\tan x}{1-\tan x} = 1$, maka $x = \cdots$

A. $\frac{\pi}{15}$
B. $\frac{\pi}{12}$
C. $\frac{\pi}{9}$
D. $\frac{\pi}{8}$
E. $\frac{\pi}{6}$

7. Dalam segitiga ABC, diketahui sudut $A = 60^\circ$. Jika $\cos B . \cos C = 0{,}1$, maka $\tan B \cdot \tan C = \cdots$

A. – 2
B. 4
C. 6
D. 8
E. 10

8. Jika diketahui $\sin(x + \pi/2) = 0{,}6$, maka $\sin(x+\pi) + \cos(-x) = \cdots$

A. – 0,4
B. – 0,2
C. 0,2
D. 0,4
E. 0,6

9. Jika $A+B+C=360^{\circ}$, maka $\dfrac{\sin\frac{1}{2}A}{\sin\frac{1}{2}(B+C)}=\cdots$

A. $\tan\frac{1}{2}A$
B. $\cot\frac{1}{2}A$
C. $\sec\frac{1}{2}(B+C)$
D. 0
E. 1

10. Dalam segitiga ABC yang siku-siku di C, diketahui $\sin A \sin B=\dfrac{2}{5}$ dan $\sin(A-B)=5a$. Nilai a adalah ....

A. $-\dfrac{1}{5}$
B. $-\dfrac{3}{25}$
C. $-\dfrac{1}{25}$
D. $\dfrac{3}{25}$
E. $\dfrac{3}{5}$

11. Jika α adalah sudut lancip yang memenuhi $2\cos^4\alpha=\sin^2\alpha$, maka $\tan\alpha=\cdots$

A. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
B. 1/2
C. $2-\sqrt{3}$
D. 1
E. $\sqrt{3}$

12. Jika $\dfrac{\cos x}{1-\sin x}=p$ untuk $x\neq\pi/2$, maka $\tan\frac{1}{2}x=\cdots$

A. $\dfrac{1}{a+1}$
B. $\dfrac{a}{a+1}$
C. $\dfrac{a+1}{a-1}$
D. $\dfrac{a-1}{a+1}$
E. $\dfrac{a}{a-1}$

13. $(1-\sin^2 A)\tan^2 A=\cdots$

A. $2\sin^2 A-1$
B. 1
C. $1-\cos^2 A$
D. $1-\sin^2 A$
E. $\cos^2 A+2$

14. Bentuk $\sqrt{3}\cos x-\sin x$, untuk $0<x<2\pi$ dapat dinyatakan sebagai ... .

A. $2\cos(x+\frac{\pi}{6})$
B. $2\cos(x+\frac{11\pi}{6})$
C. $2\cos(x+\frac{7\pi}{6})$
D. $2\cos(x-\frac{7\pi}{6})$
E. $2\cos(x-\frac{\pi}{6})$

15. Jika $\tan a > 0$, $\tan 2a = -3/4$, dan $\tan(a-b) = 1/2$, maka $\tan^2 a - \tan^2 b = \cdots$

A. 8 D. 20

B. – 20 E. 60

C. – 40

B. Untuk soal nomor 16 sampai dengan nomor 20, kerjakan dengan singkat dan jelas!

16. Jika $x + y = 60^o$ dan $4\cos x = 3\cos y$, buktikan bahwa $\tan x = \frac{5}{9}\sqrt{3}$.

17. Jika $x - y = 30^o$ dan $\tan x = 3\tan y$, tentukan nilai dari x dan y.

18. Tentukan nilai maksimum dan minimum dari setiap fungsi berikut.

a. $f(x) = 2\cos(x + \frac{\pi}{4})\cos(x - \frac{\pi}{4})$

b. $h(x) = 10\sin(x + \frac{3\pi}{2})\sin(x - \frac{3\pi}{2})$

19. Tunjukkan bahwa persamaan partikel

$$s(t) = \sin 2\pi kt + \cos 2\pi kt,$$

dengan k konstanta tetap, s diukur dalam sentimeter dan t dalam detik merupakan gerak harmonis sederhana.

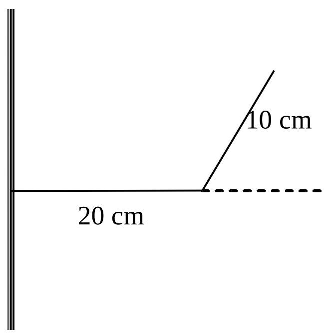
20. Hitunglah 20 suku yang pertama dari deret berikut.

a. $\cos a + \cos 3a + \cos 5a + \ldots + \cos(2n-1)a + \ldots$

b. $\sin(a + x) + \sin(a + 2x) + \sin(a + 3x) + \ldots + \sin(a + nx) + \ldots$

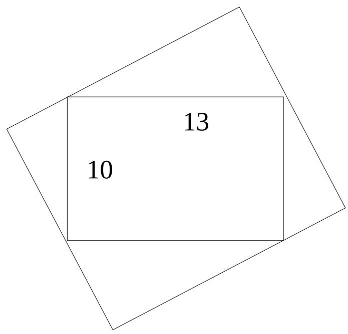
Soal Analisis

1. Talang pada sisi tembok akan dibuat dengan lembaran seng 30 cm dengan menekuk satu sisi sepanjang 10 cm ke atas, seperti terlihat pada gambar 3.8. Jika θ menyatakan sudut antara talang dengan arah mendatar, berapa besar θ agar talang mempunyai volume maksimum?



Gambar 3.8

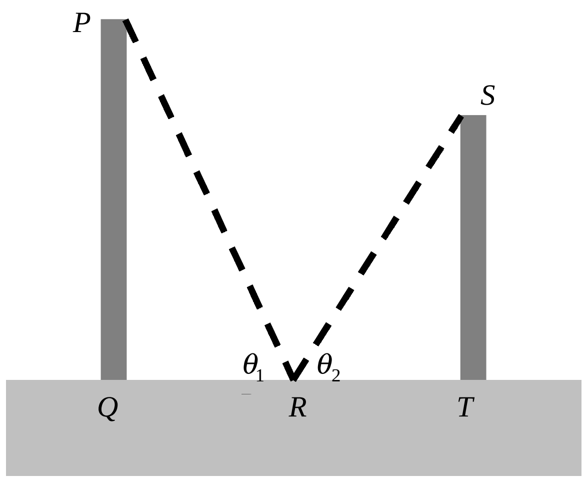
2. Diberikan persegi panjang dengan lebar 10 cm dan panjang 13 cm. Tentukan persegi panjang dengan luas maksimum yang dapat diletakkan di sekeliling persegi panjang yang diketahui.



Gambar 3.9

3. Dua tiang *PQ* dan *ST* ditunjang oleh tali *PRS* yang melintang dari puncak tiang pertama ke titik *R* di permukaan tanah yang terletak di antara tiang-tiang dan kemudian ke puncak tiang kedua seperti yang tampak dalam gambar 3.10.

   Tunjukkan bahwa panjang tali terpendek ketika $\theta_1 = \theta_2$.

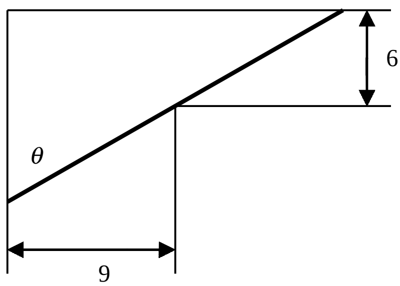


Gambar 3.10

4. Pipa besi dibawa melewati gang yang memiliki lebar 9 meter. Pada ujung gang terdapat belokan menyiku ke arah gang yang lebih sempit dengan lebar 6 meter. Perhatikan gambar 3.11. Tunjukkan bahwa panjang pipa yang mungkin dibawa secara mendatar melewati pojokan mempunyai persamaan

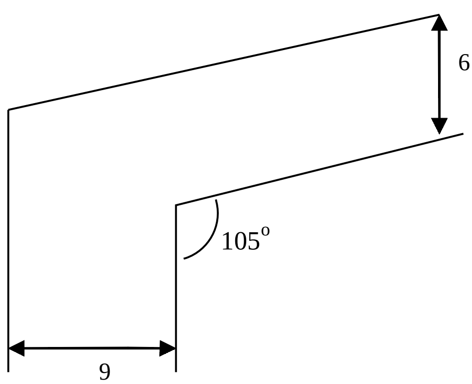
$$l(\theta) = \frac{6\sqrt{13}\cos(\theta - \alpha)}{\sin 2\theta},$$

dengan $\tan\alpha = 2/3$.



Gambar 3.11

5. Tentukan panjang pipa yang mungkin, apabila gang pada soal nomor 4 tidak bertemu siku-siku tetapi membentuk sudut 105° seperti diperlihatkan pada gambar 3.12.



Gambar 3.12

Aktivitas Proyek

Aktivitas

Nama	:	Tanggal	: ....
Kelas	: XI	Materi Pokok	: Rumus-rumus trigonometri
Kelompok	:	Semester	: 1 (satu)

Kegiatan : Membuat persegi panjang di dalam daerah setengah lingkaran

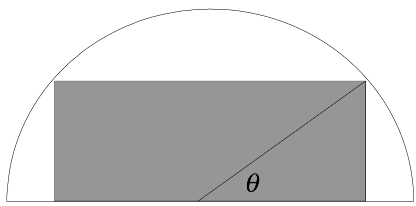
Tujuan : Menentukan persegi panjang dengan luas terbesar di dalam setengah lingkaran

A. Alat dan bahan yang digunakan

1. Dua lembar karton beda warna
2. Gunting
3. Alat tulis
4. Jangka
5. Spidol warna
6. Penggaris
7. Perekat
8. Busur derajat

B. Cara kerja

1. Ambil 1 lembar karton.
2. Gambarlah setengah lingkaran berjari-jari 20 cm, kemudian gunting bidang setengah lingkaran tersebut.
3. Pada karton yang lainnya, gambarlah beberapa persegi panjang dengan sisi panjangnya berimpit dengan diameter lingkaran, dan dua titik sudut lainnya terletak pada busur lingkaran.
4. Gunting semua persegi panjang yang telah Anda buat.
5. Tempelkan satu persegi panjang itu pada bidang setengah lingkaran tadi, menurut ketentuan di atas.
6. Buatlah garis dari salah satu sudut persegi panjang yang terletak pada busur lingkaran ke pusat lingkaran. Kemudian namai sudut antara garis tadi dengan diameter lingkaran dengan θ. Sebagai contoh perhatikan gambar 3.13.



Gambar 3.13

C. Analisis

1. Berdasarkan percobaan di atas, nyatakan sisi-sisi persegi panjang dalam θ.
2. Nyatakan luas persegi panjang dalam θ.
3. Tentukan nilai θ yang memberikan luas persegi panjang terbesar. Dari beberapa persegi panjang yang Anda buat tadi, manakah yang mempunyai luas terbesar?